

٤) قطران متعامدان في دائرة مركزها O ونقطة من القوس الصغرى BC احسب قياس كل من:

① \widehat{AMB} ② \widehat{AMC} ③ \widehat{BMC}

الحل:

① المثلث AMB أحد أضلاعه AB قطر في الدائرة فهو مثلث قائم إذاً: $\widehat{AMB} = 90^\circ$

② زاوية محيطية تحصر القوس AC والزاوية \widehat{AOC} مركزية تحصر نفس القوس AC إذاً:

$$\widehat{AMC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \times 90^\circ$$

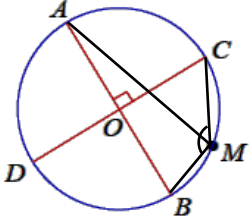
$$\widehat{AMC} = 45$$

③ محيطية تحصر القوس BDC إذاً:

$$\widehat{BMC} = \frac{1}{2} \widehat{BDC}$$

$$\widehat{BDC} = \widehat{BDA} + \widehat{AC} = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$

$$\widehat{BMC} = \frac{1}{2} (270^\circ) = 135^\circ \quad \text{إذاً}$$



٥) A و B و C و D نقاط من دائرة C نعلم أن $\widehat{ABC} = 22^\circ$ و $\widehat{BAD} = 58^\circ$

الوتران $[AD]$ و $[BC]$ متقاطعان في J ، احسب قياس كل من:

① \widehat{BCD} ② \widehat{CDA} ③ \widehat{CJD}

الحل:

① زاوية محيطية تحصر القوس BD فهي تساوي قياس الزاوية المحيطية \widehat{BAD} المشتركة معها بنفس القوس

$$\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = 58^\circ \quad \text{إذاً}$$

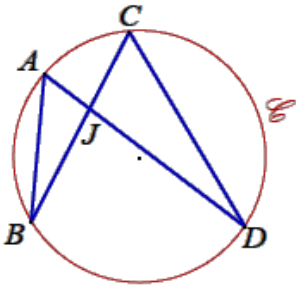
② زاوية محيطية تحصر القوس AC فهي تساوي قياس الزاوية المحيطية \widehat{ABC}

$$\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 22^\circ \quad \text{المشتركة معها بنفس القوس إذاً}$$

③ المثلث CJD فيه قياس $\widehat{CDJ} = 22^\circ$ و $\widehat{JCD} = 58^\circ$

$$\widehat{CJD} = 180^\circ - (22^\circ + 58^\circ)$$

$$= 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \quad \text{إذاً}$$



٦) ① ارسم نقطتين O و A المسافة بينهما 4 cm

② ارسم الدائرة C التي مركزها O وتمر بالنقطة A

③ استعمل مسطرة ومنقلة لرسم مثلث ABC متساوي الأضلاع في الدائرة C

④ ارسم المثلث ABC المتساوي الأضلاع في الدائرة C دون استعمال منقلة

الحل:

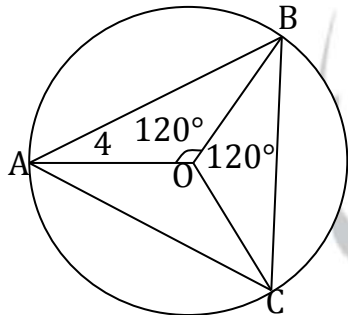
③ ABC مضلع منتظم عدد أضلاعه $n = 3$ رؤوسه تقع على الدائرة

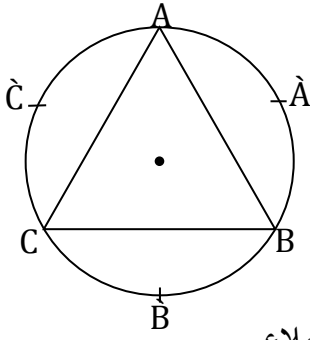
التي مركزها O ومنه:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

نرسم نصف القطر OA ونحدد بالمنقلة الزاوية $\widehat{AOB} = 120^\circ$ ، ثم نحدد بالمنقلة الزاوية $\widehat{BOC} = 120^\circ$

نصل بين النقاط A و B و C على التوالي فنحصل على المثلث ABC المتساوي الأضلاع





4 لرسم المثلث دون استعمال منقلة : نرسم دائرة نصف قطرها 4 cm

ثم نفتح الفرجار بفتحة تساوي نصف قطر الدائرة ،

نضع إبرة الفرجار في النقطة A على الدائرة ونرسم قوساً يقطع الدائرة في نقطة A-hat

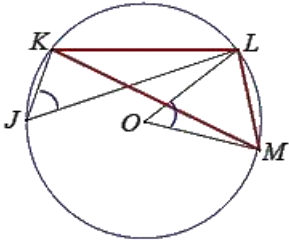
ثم نضع إبرة الفرجار في النقطة A-hat وبنفس فتحة الفرجار نرسم قوساً يقطع الدائرة

في النقطة B وتتكرر العملية نحصل على 6 نقاط على الدائرة تشكل مسدس منتظم

ثم نصل بين كل نقطتين غير متتاليتين اعتباراً من A فنحصل على المثلث ABC المتساوي الأضلاع

(7) $K\hat{J}L = L\hat{O}M = 52^\circ$ ، O نقاط من دائرة مركزها O

احسب قياسات زوايا المثلث LMK



الحل: $K\hat{M}L = K\hat{J}L = 52^\circ$ زاويتان محيطيتان تحصران ذات القوس وهو \widehat{KL}

$L\hat{K}M$ زاوية محيطية تحصر القوس \widehat{ML} و $L\hat{O}M$ زاوية مركزية تحصر القوس \widehat{ML} ، إذاً:

$$L\hat{K}M = \frac{1}{2}L\hat{O}M = \frac{1}{2} \times 52 = 26^\circ$$

بما أن مجموع زوايا المثلث MKL : 180° إذاً:

$$\Rightarrow M\hat{L}K = 180^\circ - (52^\circ + 26^\circ)$$

$$= 180^\circ - 78^\circ$$

$$M\hat{L}K = 102^\circ$$

(8) $B\hat{A}E = 120^\circ$ قطر في دائرة C مركزها A و E نقطة من هذه الدائرة تحقق $B\hat{A}E = 120^\circ$

احسب قياسات الزوايا الآتية: ① $C\hat{A}E$ ② $E\hat{C}B$ ③ $C\hat{B}E$

الحل:

① $C\hat{A}E = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ لأن $B\hat{A}C$ زاوية مستقيمة.

② $E\hat{C}B$ زاوية محيطية تحصر القوس \widehat{BE} فهي تساوي نصف المركزية $B\hat{A}C$

المشتركة معها بنفس القوس إذاً:

$$B\hat{C}E = \frac{1}{2}B\hat{A}E = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

③ $C\hat{B}E$ محيطية تحصر القوس \widehat{EC} فهي تساوي نصف المركزية $E\hat{A}C$ المشتركة معها بنفس القوس ، إذاً:

$$E\hat{B}C = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

(9) $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها 7 cm

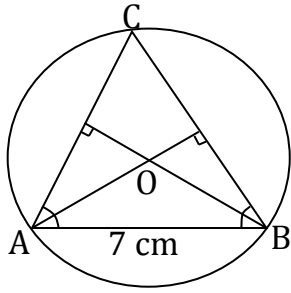
① ارسم $[AB]$ وارسم نقطة C بحيث تحصل على $B\hat{A}C = 70^\circ$ و $A\hat{B}C = 60^\circ$

ثم ارسم الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC ، ارمز إلى مركز الدائرة بالرمز O

② احسب قياس الزاوية $A\hat{O}B$

الحل:

١ نرسم [AB] قطعة مستقيمة طولها 7 cm باستخدام المنقلة نرسم $\widehat{ABC} = 60^\circ$ ونرسم $\widehat{CAB} = 70^\circ$ ينتج المثلث ABC



بواسطة المسطرة نرسم محور [BC] ومحور [AC]

فيلتقيان في O مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC

نفتح الفرجار بمقدار OA ونرسم هذه الدائرة

٢ مجموع زوايا المثلث ABC 180° ، إذا :

$$\widehat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ)$$

$$\widehat{C} = 50^\circ$$

\widehat{AOB} مركزية تقابل القوس \widehat{AB} ، و \widehat{ACB} محيطية تقابل القوس \widehat{AB}

$$\text{إذاً: } \widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB}$$

$$= 2 \times 50^\circ$$

$$\widehat{AOB} = 100^\circ$$

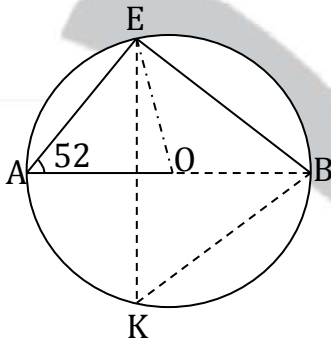
١٠ C دائرة مركزها O وقطرها [AB] حيث $AB = 8$

١ ارسم شكلاً حسب معطيات النص، وضع على C نقطة E تحقق $\widehat{BAE} = 52^\circ$

٢ أثبت أن المثلث AEB قائم الزاوية

٣ وضع على القوس \widehat{AB} التي لا تضم E نقطة K

احسب قياس \widehat{BKE} ، \widehat{BOE}



الحل:

٢ المثلث AEB قائم في E لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة

٣ \widehat{BOE} زاوية مركزية تحصر القوس \widehat{EB}

\widehat{BAE} محيطية تحصر القوس ذاته.

$$\text{ومنه } \widehat{BAE} = \frac{1}{2} \widehat{BOE}$$

لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف المركزية المشتركة معها بالقوس ومنه: $52^\circ = \frac{1}{2} \widehat{BOE}$

$$\widehat{BOA} = 2(52^\circ) = 104^\circ$$

لحساب \widehat{BKE} : \widehat{BKE} و \widehat{BAE} زاويتان محيطيتان تحصران القوس نفسه وهو \widehat{BE}

ومنه الزاويتان متساويتان أي $\widehat{BKE} = 52^\circ$

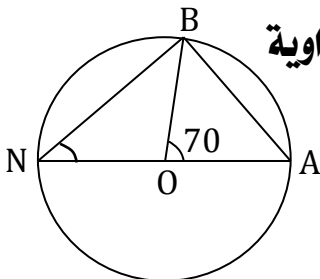
١١ C دائرة مركزها O ونصف قطرها 4 cm ، A ، B نقطتان من C تحققان $\widehat{AOB} = 70^\circ$

N هي النقطة المقابلة قطرياً للنقطة A

١ ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص ، ثم أثبت أن المثلث ABN قائم الزاوية

٢ احسب قياس الزاوية \widehat{ANB}

٣ احسب الطول AB مقرباً إلى أقرب ميليمتر



الحل:

① المثلث ABN قائم لأن أضلاعه قطر في الدائرة

② الزاوية \widehat{ANB} زاوية محيطية تقابل القوس \widehat{AB}

والزاوية \widehat{AOB} زاوية مركزية تقابل نفس القوس \widehat{AB}

لأن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس

$$\widehat{ANB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$$

$$\widehat{ANB} = \frac{1}{2} (70^\circ)$$

$$\widehat{ANB} = 35$$

$$\sin \widehat{ANB} = \frac{AB}{AN} \quad \text{③}$$

$$\sin 35^\circ = \frac{AB}{8}$$

$$AB = 8 \sin 35^\circ = 8 \times 0.573575764$$

$$AB = 4.58806115$$

للتحويل إلى الـ mm نضرب بـ 10 فنجد : $AB = 45.8806115 \approx 46 \text{ mm}$

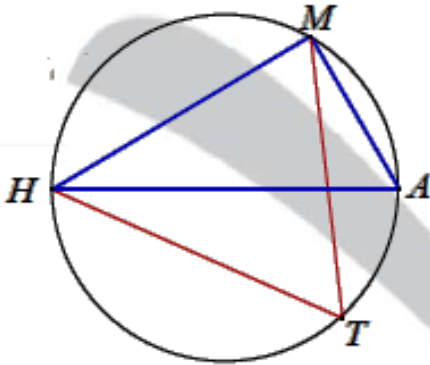
⑫ C دائرة قطرها $AH = 9 \text{ cm}$ و M نقطة من الدائرة تحقق :

$AM = 5.3 \text{ cm}$ و T نقطة أخرى من C

① تحقق أن المثلث MAH قائم الزاوية

② احسب قياس الزاوية $M\hat{H}A$ لأقرب درجة

③ ما قياس الزاوية $H\hat{T}M$ لأقرب درجة



الحل:

① المثلث MAH قائم في M لأن أحد أضلاعه وهو AH قطر في الدائرة

② في المثلث AMH :

$$\sin \hat{H} = \frac{AM}{AH} = \frac{5.3}{9}$$

$$= 0.5888 \approx 0.5$$

$$\Rightarrow \hat{H} \approx 30^\circ$$

③ المثلث AMH فيه $\hat{H} \approx 30^\circ$ و $\hat{M} = 90^\circ$ ومنه $\hat{A} \approx 60^\circ$

الزاويتان $M\hat{H}A$ و $M\hat{T}H$ محيطيتان تحصران نفس القوس \widehat{HM} فهما متساويتان ومنه: $H\hat{T}M \approx 60^\circ$

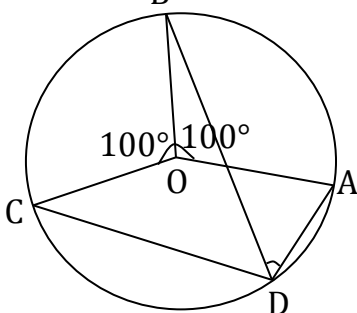
⑬ C دائرة مركزها O

① وُضِعَ النقاط A و B و C بهذا الترتيب على C بحيث يكون $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 100^\circ$

ثم وُضِعَ نقطة D على القوس \widehat{AC} التي لا تضم B

② احسب قياس الزاوية $A\hat{D}B$

③ أثبت أن نصف المستقيم (DB) منصف للزاوية $A\hat{D}C$



الحل:

① الزاوية \widehat{ADB} محيطية تقابل القوس \widehat{AB}

② الزاوية \widehat{AOB} مركزية تقابل نفس القوس \widehat{AB}

$$\widehat{ADB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \text{ ومنه}$$

لأن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس

$$\widehat{ADB} = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ \text{ ومنه}$$

③ إن $\widehat{ADB} = 50^\circ$

\widehat{BDC} زاوية محيطية تقابل القوس \widehat{BC}

\widehat{BOC} زاوية مركزية تقابل نفس القوس \widehat{BC}

$$\widehat{BDC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} \text{ ومنه}$$

$$\widehat{BDC} = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$$

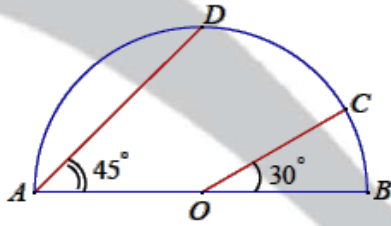
نجد أن: $\widehat{ADB} = \widehat{BDC} = 50^\circ$ وبالتالي $[DB]$ منصف للزاوية \widehat{ADC}

١٤) C و D نقطتان من نصف دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$ تحققان $\widehat{BOC} = 30^\circ$

و $\widehat{BAD} = 45^\circ$

① ما طبيعة المثلث ADB ؟ علل إجابتك.

② ما طبيعة المثلث COD ؟ علل إجابتك.



الحل:

① المثلث ADB قائم في D لأن:

أحد أضلاعه AB قطر في الدائرة فالمثلث قائم وتره AB

② المثلث COD متساوي الساقين لأن $OC = OD$ " أنصاف أقطار "

ولدينا \widehat{BOD} زاوية مركزية تشترك مع الزاوية المحيطية \widehat{BAD} بالقوس \widehat{BD}

وبما أن قياس الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس فإن:

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2} \widehat{BOD}$$

$$\Rightarrow \widehat{BOD} = 2 \widehat{BAD}$$

$$\widehat{BOD} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

إن: $\widehat{COD} = \widehat{BOD} - \widehat{BOC}$

$$= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

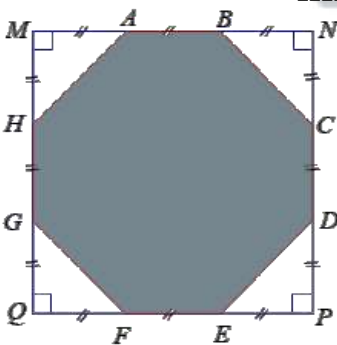
ومن المثلث COD متساوي الأضلاع لأنه متساوي الساقين وفيه $\widehat{COD} = 60^\circ$

١٥) $MNPQ$ مربع و $ABCDEFGH$ ثمّن مشار إليه في الشكل المرافق

① هل هذا المثلث منتظم؟ اشرح.

② A هي مساحة المربع $MNPQ$ و \hat{A} مساحة المثلث

$$\hat{A} = \frac{7}{9} A \text{ اشرح لماذا}$$



الحل:

① غير منتظم لأن: المثلث BNC قائم في N والوتر هو أطول الأضلاع وبالتالي: $BC \neq BN$

وبما أن: $AB = BN$ فيكون $BC \neq AB$

وُجد في الثماني ضلعين غير متساويين فالثماني غير منتظم

② نفرض $BN = x$

مساحة المربع = (طول الضلع)²

حيث طول ضلع المربع $3x$

$$A = (3x)^2 = 9x^2$$

مساحة المثلث القائم BNC = نصف جداء ضلعيه القائمتين

$$S_{BNC} = \frac{1}{2}(x)(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$S_{NBC} = S_{AMH} = S_{GQF} = S_{DPE} = \frac{x^2}{2}$$

مساحة الثماني = مساحة المربع مطروح منها مجموع مساحات المثلثات الأربعة

$$\begin{aligned} \hat{A} &= 9x^2 - 4\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ &= 9x^2 - 2x^2 = 7x^2 \end{aligned}$$

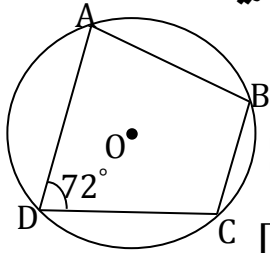
$$A = 9x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{A}{9}$$

$$\hat{A} = 7x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{\hat{A}}{7}$$

$$\frac{A}{9} = \frac{\hat{A}}{7} \text{ ومنه}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{7}{9}A$$

١٦) $ABCD$ رباعي دائري مركزها O نعلم أن $\hat{ADC} = 72^\circ$ ، احسب قياس الزاوية \hat{ABC}



الحل:

نلاحظ أن: \hat{ABC} و \hat{ADC} زاويتان متقابلتان في رباعي دائري فهما متكاملتان

$$\text{ومنه: } \hat{ABC} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

١٧) A و B و C و D أربع نقاط من دائرة C مركزها O . الوتران $[AB]$ و $[CD]$

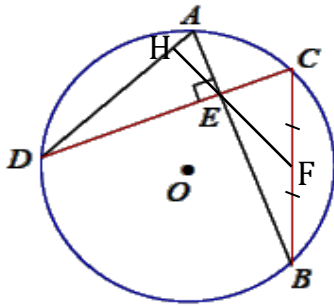
متعامدان في E و $\hat{BCD} = 69^\circ$

① احسب قياس الزاوية \hat{ADC}

② ١. ارسم المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث EBC ولتكن F نقطة تلاقيه مع $[BC]$

٢. ما طبيعة المثلث EFC ؛ تحقق من إجابتك

٣. استنتج قياس الزاوية \hat{CEF}



③ يقطع المستقيم (EF) القطعة المستقيمة [AD] في النقطة H

١. ما قياس الزاوية \widehat{DEH} ولماذا؟

٢. استنتج قياس الزاوية \widehat{DHE} في المثلث DEH

٣. استنتج أيضاً دور المستقيم (EH) في المثلث ADE

الحل:

① الزاويتان \widehat{DAB} و \widehat{BCD} محيطيتان تقابلان نفس القوس \widehat{BD} فهما متساويان فيكون: $\widehat{DAB} = \widehat{BCD} = 69^\circ$

في المثلث القائم AED مجموع زوايا المثلث 180°

$$\Rightarrow \widehat{ADC} = 180 - (90 + 69) = 21^\circ$$

② $\widehat{AED} = \widehat{CEB} = 90^\circ$ للتقابل بالرأس

المثلث EBC قائم في \widehat{E} و EF متوسط متعلق بالوتر فهو يساوي نصف الوتر

$$\Rightarrow EF = \frac{1}{2}BC = FC$$

ومنه المثلث EFC متساوي الساقين رأسه F

$\widehat{CEF} = \widehat{FCE} = 69^\circ$ لأن زاويتا القاعدة متساويتان

③ ١. ولدنيا: $\widehat{DEH} = \widehat{CEF} = 69^\circ$ للتقابل بالرأس

٢. في المثلث DHE مجموع زوايا المثلث 180° :

$$\widehat{DHE} = 180 - (69 + 21) = 90^\circ$$

$$\widehat{DHE} = 90^\circ$$

٣.

فإن EH ارتفاع في المثلث ADE لأنه عمود نازل من رأس المثلث على الضلع المقابل

(١٨) $\widehat{DOE} = 120^\circ$ و $\widehat{BOC} = 50^\circ$ ، O مركزها C و D و B و E أربع نقاط من دائرة C متقاطعان في A

DC و BE

① احسب قياس الزاوية \widehat{DAE} (\widehat{DAE} زاوية داخلية في الدائرة)

② اكتب نصاً بحساب قياس الزاوية الداخلية في الدائرة

الحل:

① الزاوية \widehat{DCE} زاوية محيطية تشترك مع الزاوية المركزية \widehat{DOE} بالقوس \widehat{DE}

$$\widehat{DCE} = \frac{1}{2}\widehat{DOE} = \frac{1}{2}(120^\circ) = 60^\circ$$

ومنه

الزاوية \widehat{CEB} زاوية محيطية تشترك مع الزاوية المركزية \widehat{COB} بالقوس \widehat{BC}

$$\widehat{CEB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$$

ومنه

$$= \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ$$

المثلث ACE فيه $\widehat{C} = 60^\circ$ و $\widehat{E} = 25^\circ$ ومنه:

$$\widehat{A} = 180^\circ - (60 + 25)$$

$$\widehat{A} = 180^\circ - 85 = 95^\circ$$

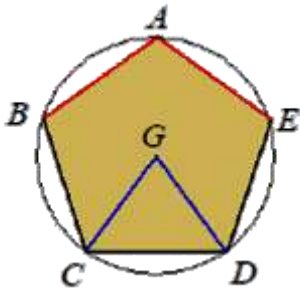
$$\widehat{DAE} = 180^\circ - \widehat{EAC}$$

$$= 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

ومنه نجد

$$\textcircled{2} \text{ نلاحظ أن: } \widehat{DAE} = \frac{1}{2}(120^\circ) + \frac{1}{2}(50^\circ)$$

النص "قياس الزاوية الداخلية في الدائرة هو: مجموع قياس نصفي القوسين اللذين يحصران كل من الزاوية الداخلية ومقابلتها بالرأس"



$$\textcircled{19} \text{ } ABCDE \text{ خمس منتظم مركزه } G = \frac{1}{2}(120^\circ) = 60^\circ$$

1 احسب قياس الزاوية \widehat{CGD}

2 احسب قياس الزاوية \widehat{EAB}

الحل:

$$\widehat{CGD} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \quad \textcircled{1}$$

2 \widehat{CGD} زاوية مركزية تقابل القوس \widehat{CD}

ومنه $\widehat{CD} = 72^\circ$ لأن قياس الزاوية المركزية تساوي قياس القوس المقابل لها ، كذلك $BC = DE = 72^\circ$

$$\text{ومنه } \widehat{EDB} = \widehat{ED} + \widehat{DC} + \widehat{CB} = 72^\circ + 72^\circ + 72^\circ = 216^\circ$$

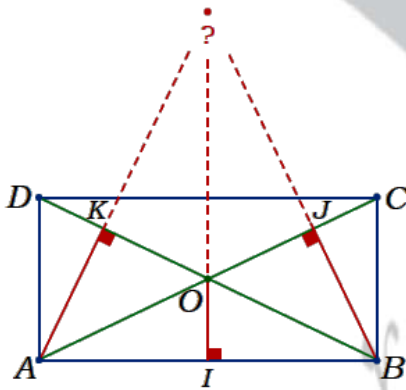
$$\text{الزاوية } \widehat{EAB} \text{ زاوية محيطية تقابل القوس } \widehat{EDB} \text{ ومنه}$$

$$\widehat{EAB} = \frac{1}{2}\widehat{ECB} = \frac{1}{2}(216) = 108^\circ$$

20 نتأمل مستطيلاً $ABCD$ يتقاطع قطراه في O

1 سم كل رباعي دائري في الشكل مع التعليل

2 أثبت أن المستقيمت BJ و AK و IO تتلاقى في نقطة واحدة



الحل:

1 المستطيل $ABCD$ هو رباعي دائري حيث أن زواياه قائمة فيكون

مجموع كل زاويتان متقابلتان هو 180°

الرباعي $ABJK$ هو رباعي دائري لأن فيه $\widehat{K} = \widehat{J} = 90^\circ$

وهما تقعان بجهة واحدة بالنسبة للمستقيم AB

الرباعي $OIBJ$ هو رباعي دائري لأن فيه $\widehat{J} + \widehat{I} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

الرباعي $OIAK$ هو رباعي دائري لأن فيه $\widehat{K} + \widehat{I} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

2 المثلث AOB فيه :

IO ارتفاع متعلق بالضلع AB

BJ ارتفاع متعلق بالضلع AO

AK ارتفاع متعلق بالضلع OB

والارتفاعات في المثلث تلتقي بنقطة واحدة أي IO و BJ و AK تلتقي بنقطة واحدة.